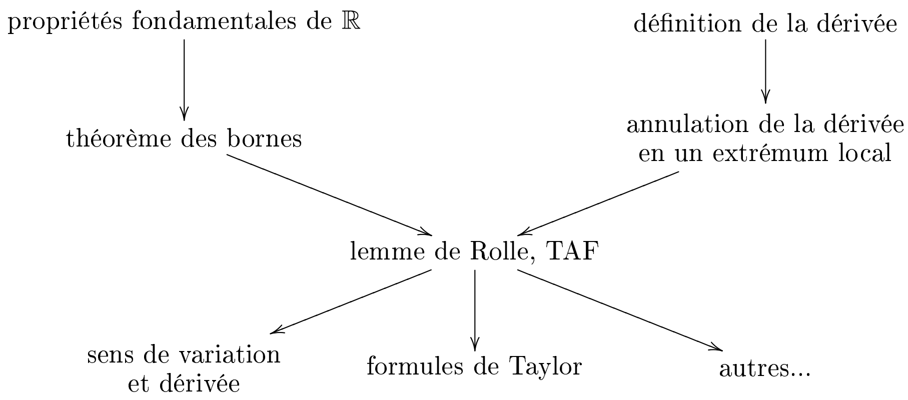
IV Dérivabilité sur un intervalle

L'un des usages principaux de la dérivée f' d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ consiste à étudier les variations de f. On sait en effet depuis le lycée que si f' est positive sur un intervalle, alors f est croissante sur cet intervalle.

L'objet de cette section est de démontrer ce résultat, qui n'a rien d'évident : en effet la définition de $f'(x_0)$ ne fait intervenir que le comportement de $f(x)$ quand x devient arbitrairement proche de x_0, et on ne voit pas a priori comment ces nombres dérivés pourraient permettre de comparer $f(x_0)$ à $f(x_1)$ pour x_1 fixé (et pas forcément proche de x_0). L'outil principal de la preuve est le théorème des accroissements finis (TAF). Ce théorème est un outil important en analyse, indépendamment de l'étude des variations d'une fonction, et nous en verrons d'autres applications en exercice. On commence par démontrer un cas particulier appelé « lemme de Rolle », qui repose sur le théorème des bornes vu dans le chapitre sur la continuité et que nous n'avons pas démontré, ainsi que sur l'annulation de la dérivée en un extrémum local, vue dans la section précédente. On a donc le schéma logique suivant :



Lemme (de Rolle). Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application. On suppose vérifiées les « hypothèses des accroissements finis » (HAF) : f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si de plus $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve. L'intervalle $[a, b]$ est fermé borné, et f est continue sur $[a, b]$, donc d'après le théorème des bornes f admet un maximum et un minimum sur $[a, b]$: il existe x_0, $x_1 \in [a, b]$ tels que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ pour tout $x \in [a, b]$.
Si x_0 (ou x_1) est dans $]a, b[$, alors on peut prendre $c = x_0$ (ou x_1). En effet f admet alors un extrémum local en c, qui n'est pas au bord de l'intervalle $]a, b[$, et elle est dérivable en c, donc $f'(c) = 0$ d'après le résultat de la section précédente.
Il reste à traiter le cas où x_0 et x_1 sont tous les deux au bord de l'intervalle $[a, b]$. Comme $f(a) = f(b)$, dans ce cas on doit avoir $f(x_0) = f(x_1)$, et l'inégalité $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ montre que f est constante sur $[a, b]$. En particulier, tous les taux d'accroissements de f entre deux points de $[a, b]$ sont nuls, et donc $f'(c) = 0$ pour n'importe quel point $c \in]a, b[$. □

Théorème (des accroissements finis, TAF). Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application. On suppose vérifiées les « hypothèses des accroissements finis » (HAF) : f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Preuve. On pose $\theta = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, et on cherche donc $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \theta$. Pour cela il suffit d'appliquer le lemme de Rolle à la fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - \theta \times (x - a)$. En effet le polynôme $\theta \times (x - a)$ est dérivable sur $[a, b]$, donc g vérifie encore les HAF, et de plus on a

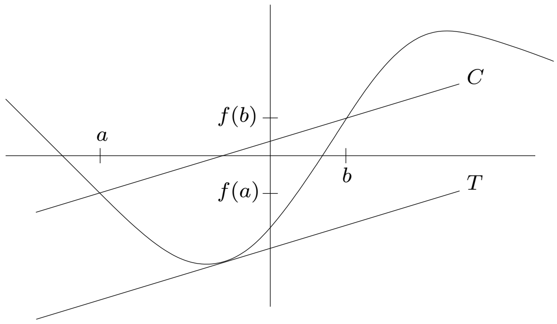
$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \times b - a = f(a) = g(a).$$

Le lemme de Rolle donne alors $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or on a $g'(x) = f'(x) - \theta$ pour tout $x \in]a, b[$. Donc $f'(c) = \theta$. □

Corollaire. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors f' est croissante sur I.

Preuve. Il faut montrer que pour tous a, $b \in I$ tels que $a \leq b$, on a $f(a) \leq f(b)$. Si $a = b$, c'est clair. Si $a < b$, on applique le TAF à f entre a et b : il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Comme $f'(c) \geq 0$ et $b - a > 0$, on obtient bien $f(b) - f(a) \geq 0$. □

Remarques. Si $f(a) = f(b)$, le TAF donne $f'(c) = 0$ et on retrouve le lemme de Rolle, qui est ainsi un cas particulier du TAF. Le TAF admet par ailleurs l'interprétation graphique suivante. On appelle *corde* au graphe de f entre a et b la droite qui passe par les points du graphe d'abscisses a, b. Alors le TAF affirme qu'il existe un point du graphe, d'abscisse comprise entre a et b, en lequel la tangente (T) au graphe de f est parallèle à la corde (C) au graphe entre a et b. En effet la pente de la tangente au point d'abscisse c est $f'(c)$, et la pente de la corde est $\theta = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



Application : démonstrations d'inégalités. Exemple : en appliquant le TAF à la fonction sinus entre deux réels a, b, et en utilisant l'inégalité $|\cos c| \leq 1$ valable pour tout réel c, on obtient :

$$|\sin b - \sin a| = |\cos(c)(b-a)| = |\cos(c)| \times |b-a| \leq |b-a|.$$

On a donc $|\sin b - \sin a| \leq |b-a|$ pour tous réels a, b. Par exemple, avec $b = x$ et $a = 0$ on obtient $|\sin x| \leq |x|$ pour tout b. Ces inégalités peuvent se retrouver (de manière moins directe) en effectuant une étude de fonction.
Exercice 4 : Montrer que, pour a, $b \geq 1$ on a $|\ln b - \ln a| \leq |b-a|$.

V Dérivées d'ordre supérieur

Dans cette section nous allons donner une approche « théorique » aux développements limités déjà utilisés pour les calculs de limite, et nous allons notamment présenter la formule de Taylor-Young qui permet d'obtenir tous les développements limités du formulaire. Rappelons que l'existence d'un DL d'ordre 1 en x_0 est équivalent à la dérivabilité de f en x_0, et que cet DL est alors donné par la formule

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\epsilon(x-x_0),$$

avec $\lim_0 \epsilon = 0$. La formule de Taylor-Young est une généralisation de cette formule à l'ordre n, et pour l'énoncer on a besoin de la notion de dérivée n^{e}. Notons qu'en revanche, l'equivalence entre dérivabilité et existence d'un DL ne se généralise pas aux ordres supérieurs.

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application définie sur un intervalle non trivial $I \subset \mathbb{R}$. On définit la dérivée n^{e} $f^{(n)}$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ en posant $f^{(1)} = f'$, et $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ si $f^{(n-1)}$ est dérivable. On dit que f est de classe C^n si la dérivée n^{e} existe et est continue. On dit que f est de classe C^∞ si les dérivées n^{es} $f^{(n)}$ existent pour tout n — on peut noter qu'elles sont alors continues, car dérivables.

Exemples. Les fonctions usuelles (polynômes, exponentielle, logarithme, sinus et cosinus) sont de classe C^∞, et les « théorèmes généraux » sur les opérations usuelles (sommes, produits, quotients, composées) s'appliquent pour montrer qu'une fonction est de classe C^n. Il est évident, par récurrence, qu'on a $\exp^{(n)} = \exp$ pour tout n. De même on a

$$\cos^{(2n)} = (-1)^n \cos, \quad \cos^{(2n-1)} = (-1)^n \sin,$$
$$\sin^{(2n)} = (-1)^n \sin, \quad \sin^{(2n-1)} = (-1)^{n+1} \cos.$$

Exercice 5 : Montrer par récurrence sur n qu'on a $(1/x)^{(n)} = (-1)^n n!/x^{n+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème (formule de Taylor Young). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application définie sur un intervalle non trivial $I \subset \mathbb{R}$. On suppose que la dérivée n^{e} $f^{(n)}(x_0)$ existe en un point $x_0 \in I$. Alors il existe une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_0 \epsilon = 0$ et, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\epsilon(x-x_0).$$

Autrement dit, f admet un développement limité à l'ordre n en x_0, et surtout, les coefficients de ce DL sont donnés par les valeurs des dérivées n^{es} en x_0.

Preuve. Pour $n = 1$, la formule résulte de la caractérisation de la dérivabilité à l'aide d'un DL. On procède ensuite par récurrence, en utilisant le TAF. Nous allons seulement montrer comment passer de $n = 1$ à $n = 2$. Soit donc f une fonction qui admet une dérivée seconde en x_0. On considère le reste

$$\varphi(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2,$$

et on veut montrer que $\varphi(x)/(x - x_0)^2$ tend vers 0 en x_0. Pour cela on doit utiliser la définition des limites : on fixe $\epsilon > 0$ et on cherche $\alpha > 0$ tel que $|\varphi(x)| \leq \epsilon|x - x_0|^2$ pour tout $x \in I$ tel que $|x - x_0| \leq \alpha$.
Pour trouver α on va utiliser le TAF. On calcule la dérivée de φ :

$$\varphi'(x) = f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0).$$

Notons que par hypothèse f' est dérivable en x_0, et on peut donc appliquer le cas $n = 1$ à f' : on obtient exactement le fait que $\varphi'(x)/(x - x_0)$ tend vers 0 en x_0. En particulier on peut trouver $\alpha > 0$ tel que $|\varphi'(x)| \leq \epsilon|x - x_0|$ pour tout $x \in I$ tel que $|x - x_0| \leq \alpha$.
Maintenant on applique le TAF à φ entre x_0 et x : on obtient y entre x_0 et x tel que $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = |\varphi'(y)| \times |x - x_0|$. Comme y est entre x_0 et x, on a $|y - x_0| \leq |x - x_0|$. En particulier si $|x - x_0| \leq \alpha$ on a $|y - x_0| \leq \alpha$, donc d'après le paragraphe précédent $|\varphi'(y)| \leq \epsilon|y - x_0| \leq \epsilon|x - x_0|$. Comme $\varphi(x_0) = 0$ on obtient ainsi

$$|\varphi(x)| = |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \epsilon|x - x_0| \times |x - x_0| = \epsilon|x - x_0|^2,$$

pour tout x tel que $|x - x_0| \leq \alpha$. C'est ce qu'on voulait. $\square$

Le théorème précédent permet notamment de démontrer l'existence et la forme des développements limités usuels en 0. Par exemple, exp est de classe C^∞ et on a $\exp^{(n)}(0) = 1$. On en déduit l'existence de $\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_0 \epsilon = 0$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x).$$

On établit de la même manière les autres DL en 0 du formulaire, en calculant éventuellement par récurrence les dérivées n^{es}.

Exercice 6 : Écrire explicitement la formule de Taylor-Young à l'ordre n en $x_0 = 1$ pour la fonction $f : x \mapsto 1/x$. On utilisera la formule pour les dérivées n^{es} donnée à l'exercice 5. Retrouve-t-on ainsi un développement limité connu ?

Remarque : pour calculer les DL, en 0 ou ailleurs, d'une fonction f autre que celles figurant dans le formulaire, il est souvent plus facile d'utiliser les règles de calcul avec les DL que de calculer les dérivées successives de f pour appliquer la formule de Taylor-Young. Ainsi l'intérêt de la formule de Taylor-Young, extrêmement générale, est surtout théorique.