Analyse 3

Indications pour l'exercice 10.

a. On a $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$ pour tout $x \neq 0$. Quelles sont les valeurs prises par $\frac{1}{x^2}$ pour $x \geq 1$?

b. La question précédente donne $|f'(c)| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $c \geq 1$. Il reste à appliquer le Théorème des Accroissements Finis (voir cours).

c. On calcule $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ puis on applique l'inégalité de la question précédente avec a et b convenables.

d. (i) On manipule l'encadrement $1 \leq u_n \leq 2$: par exemple, on commence par en déduire $1 \leq \frac{2}{u_n} \leq 2$...
   (ii) Appliquer la question c. pour passer de n à $n+1$.
   (iii) À partir de quel entier n a-t-on $2^{-n} \leq 10^{-6}$?

Indications pour l'exercice 15.

a. On a $\lim_{0^+} e^{1/x} = +\infty$ et $\lim_{0^-} e^{1/x} = 0$. De plus « l'exponentielle l'emporte sur le polynôme » (pour s'en assurer on peut faire le changement de variable $x = 1/y$).

b. Ce ne sont pas des formes indéterminées...

c. On a $f'(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2}\, e^{1/x}$. Il suffit donc d'étudier le signe du trinôme $x^2 - x - 2$.

d. Il faut calculer la limite à gauche du taux d'accroissement voulu.
On prend pour $f(0)$ la valeur de la limite en 0^-, c'est-à-dire $f(0) = 0$.

e. La droite d'équation $y = x + 3$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$ et $-\infty$.

f. Représenter : les variations, les limites en 0^+ et 0^-, la demi-tangente en 0^-, les tangentes horizontales aux points où la dérivée s'annule, la droite asymptote en $\pm\infty$.

Corrigé de l'exercice 10.

a. On calcule $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$ pour tout $x \neq 0$. Pour $x \geq 1$ on a $x^2 \geq 1$, et comme la fonction inverse est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+^*$ on en déduit $0 \leq \frac{1}{x^2} \leq 1$, donc $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$. Cela s'écrit aussi $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

b. On applique alors le Théorème des Accroissements Finis à f entre a et b : en effet f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, et on obtient l'existence de $c \in]a, b[$ (ou $]b, a[$ si $b < a$) tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

En multipliant par $b - a$ des deux côtés et en prenant les valeurs absolues on obtient $|f(b) - f(a)| = |f'(c)| \times |b - a|$. Maintenant si a, b sont supérieurs à 1, on a aussi $c \geq 1$ car c est entre a et b, et on peut donc appliquer la question précédente qui donne $|f'(c)| \leq \frac{1}{2}$, donc $|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|b - a|$.

c. On a $f(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2}) = \sqrt{2}$. On a $\sqrt{2} \geq 1$ car $2 \geq 1$, et si $x \geq 1$ on peut appliquer la question précédente avec $b = x$ et $a = \sqrt{2}$: on obtient $|f(x) - \sqrt{2}| = |f(x) - f(\sqrt{2})| \leq \frac{1}{2}|x - \sqrt{2}|$.

d. (i) Montrons par récurrence sur n que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n. Pour $n = 0$ c'est vrai car $u_0 = 1$. Supposons que $1 \leq u_n \leq 2$ pour n fixé. Comme la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{u_n} \leq 1$. En multipliant par 2, puis en ajoutant terme-à-terme l'encadrement $1 \leq u_n \leq 2$ et en divisant par 2 on obtient

$$1 = \tfrac{1}{2}(1 + 2 \times \tfrac{1}{2}) \leq \tfrac{1}{2}(u_n + \tfrac{2}{u_n}) = f(u_n) \leq \tfrac{1}{2}(2 + 2 \times 1) = 2.$$

Comme $f(u_n) = u_{n+1}$, on a bien démontré la propriété voulue au rang $n + 1$.

(ii) Montrons par récurrence sur n que $|u_n - \sqrt{2}| \leq 2^{-n}$. On note que $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$ (car $1 \leq 2 \leq 4$), et donc $-1 \leq 1 - \sqrt{2} \leq 0$. Cela montre que $|u_0 - \sqrt{2}| \leq 1 = 2^0$, c'est-à-dire la propriété voulue au rang 0. Supposons maintenant que $|u_n - \sqrt{2}| \leq 2^{-n}$ pour n fixé (hypothèse de récurrence). On applique la question c. avec $x = u_n$, ce qui donne $|u_{n+1} - \sqrt{2}| = |f(u_n) - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$. En utilisant l'hypothèse de récurrence on obtient alors $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2} \times 2^{-n} = 2^{-(n+1)}$, c'est-à-dire la propriété voulue au rang $n + 1$.

(iii) Comme $\lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$, la question précédente et le « théorème des gendarmes » montrent que $\lim_{n\to\infty}(u_n - \sqrt{2}) = 0$, donc $\lim_{n\to\infty} u_n = \sqrt{2}$. De plus la question précédente montre que si $2^{-n} \leq 10^{-6}$, alors $|u_n - \sqrt{2}| \leq 10^{-6}$, donc u_n donne une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-6} près. La condition $2^{-n} \leq 10^{-6}$ est vérifiée dès que $n \geq 20$: en effet $2^{10} = 1024 \geq 10^3$, donc $2^{20} \geq 10^6$ et $2^{-20} \leq 10^{-6}$.

Remarque. En calculant les premiers termes de la suite $(u_n)_n$ on se rend compte qu'en fait la convergence vers $\sqrt{2}$ est bien meilleure :

$$\begin{aligned} u_1 &= 1,5 \\ u_2 &\simeq 1,416666666 \\ u_3 &\simeq 1,414215686 \\ u_4 &\simeq 1,414213562 \end{aligned}$$

Or $\sqrt{2} \simeq 1,414213562$. Donc dès le terme $n = 4$ on a une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-6} près, et même à 10^{-9} près ! En fait le nombre de décimales correctes double à chaque étape. Cette méthode de calcul approché de $\sqrt{2}$ était sans doute déjà connue des babyloniens ($\sim$ 1700 av. J.C.) et des grecs ; la suite $(u_n)_n$ est parfois appelée « suite de Héron » du nom d'un mathématicien grec ($\sim$ 100 ap. J.C.). Cf « méthode de Héron » et « $\sqrt{2}$ » sur Wikipedia.