Université de Caen
UFR de Sciences

année 2009-2010
1re session : mai

L2 MASS — EM 49

Mathématiques et Applications

durée : 3 heures
Aucun document, aucune calculatrice ne sont autorisés.

Chaque candidat doit en début d'épreuve porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après avoir été pointé. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune de ses copies ou intercalaires.

Les exercices sont indépendants.
Le barême sera réparti à égalité entre les exercices d'algèbre (1 et 2) et les exercices d'analyse (3 et 4).

Exercice 1. On considère l'endomorphisme $f \in L(\mathbb{R}^3)$ donné par la matrice suivante dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver un vecteur propre de f associé à la valeur propre -1. [$(1, -1, -2)$]
2. Calculer et factoriser le polynôme caractéristique de A. [$-X^3 + X^2 + X - 1 = -(X+1)(X-1)^2$]
   Quelles sont les valeurs propres de f ?
3. Calculer le rang de $A - I$. [2]
4. Sans nouveau calcul, dire si f est diagonalisable.

Exercice 2. On considère l'endomorphisme $p \in L(\mathbb{R}^3)$ donné par la formule :

$$p(x,y,z) = \frac{1}{3}\,(4x + 2y - 2z,\ -x + y + 2z,\ x + 2y + z).$$

1. a. Écrire la matrice de p dans la base canonique et montrer que p est une projection.
   b. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel. p est-elle une projection orthogonale ? [*non*]
   c. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base orthonormée de $\operatorname{Im} f$. [$\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}(1,-1,1)$, $\operatorname{Im} f = \{x + 2y = 2z\} = \mathbb{R}(4,-1,1)/3\sqrt{2} + \mathbb{R}(0,1,1)/\sqrt{2}$]
   Ces deux sous-espaces sont-ils orthogonaux ?
2. On considère la forme quadratique suivante, dépendant du paramètre réel a :

$$q_a(x,y,z) = x^2 + (1+a^2)y^2 + (1+a^2)z^2 + 2axy - 2axz - 2a^2yz.$$

   a. Écrire la forme bilinéaire symétrique associée à q_a.
   b. Montrer que q_a est définie-positive pour tout a. [$(x + ay - az)^2 + y^2 + z^2$]
   c. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire associé à q_a.
   Pour quelles valeurs de a la projection p est-elle orthogonale ? [$2a^2 - 5a + 3 = 0$: $a = 1, 3/2$]
   On utilisera le résultat de la question 1c.

suite au verso

Exercice 3. On définit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en posant $f(0,0) = 1$ et, pour $(x, y) \neq (0,0)$:

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + xy + y^2}.$$

1. Vérifier que la forme quadratique $q : (x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2$ est définie-positive.
   En déduire que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. En étudiant la restriction de f aux droites d'équation $y = ax$, montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.
3. Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à x et y en $(0,0)$.

Exercice 4. On considère les sous-ensembles suivants du plan $\mathbb{R}^2$:

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 6\}, \quad F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 6\}, \quad O = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 6\}.$$

On définit une fonction $f : F \to \mathbb{R}$ en posant $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4xy$.

1. a. Représenter E, F et O. Montrer que F est fermé et que O est ouvert.
   b. Montrer que F est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$.
   c. Montrer que f admet un maximum et un minimum globaux sur F.
   On ne cherchera pas à les déterminer.
2. On recherche les extrémums de f sur O.
   a. Rechercher les points critiques de f sur O.
   b. Étudier la nature du ou des points critiques trouvés. [*col en* $(0,0)$]
   c. La fonction f admet-elle des extrémums locaux dans O ?
3. a. Rechercher les points critiques liés de f sur E. [$(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3})$]
   b. Déterminer les valeurs des extrémums globaux de f sur F. [-6, 18]
   On utilisera les questions précédentes.
   c. Montrer que pour tous x, $y \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + y^2 \leq 6$ on a $|x^2 + y^2 + 4xy| \leq 18$.