L2 MASS — ELM 49

Mathématiques et Applications

durée : 3 heures
Aucun document, aucune calculatrice ne sont autorisés.

Chaque candidat doit en début d'épreuve porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après avoir été pointé. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune de ses copies ou intercalaires.

Les exercices sont indépendants.
Le barême sera réparti à égalité entre les exercices d'algèbre (1 et 2) et les exercices d'analyse (3 et 4).

Exercice 1. On considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de f. Vérifier qu'il admet 0 comme racine double.
2. Déterminer une base du noyau de f.
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
4. Donner un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1.

Exercice 2. On munit $\mathbb{R}^3$ de la structure euclidienne canonique. Pour toute valeur des paramètres réels a et b, avec $a \neq 0$, on considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & a & a \\ a & a & b \end{pmatrix}.$$

1. Calculer M^2. Montrer que l'égalité $M^2 = M$ implique $a = b$.
   On pourra étudier les termes diagonaux des deux matrices.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de a et b l'endomorphisme f est-il une projection ? Lorsque c'est le cas :
   a. dire pourquoi la projection f est orthogonale ;
   b. calculer une base de l'image de f ;
   c. calculer une base orthonormée de son noyau.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de a et b l'endomorphisme f est-il une isométrie ?
   Écrire les matrices correspondantes.

Exercice 3. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par la formule $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 + y^4$.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Calculer les dérivées partielles secondes de f, puis :
   a. déterminer la nature du point critique $(0, 0)$;
   b. déterminer la nature du point critique $(1, -1)$.
3. Déterminer les points critiques liés pour la quantité $f(x, y)$ soumise à la contrainte $x + y = 1$.

suite au verso

Exercice 4. On pose $U =]0,1[\times]0,1[\subset \mathbb{R}^2$ et $V = \{(x,y) \in U \mid x \neq y\}$.
Pour toute valeur du paramètre réel λ on considère la fonction $f : U \to \mathbb{R}$ définie par la formule suivante :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + \lambda xy + y^2}{x^2 - y^2} & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

1. Étudions la définition de f.
   a. Représenter U et V sur un dessin et montrer que ce sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.
   b. Justifier le fait que f est bien définie sur U entier.
   Montrer que f est de classe C^1 sur V.
2. Fixons un réel $b \in]0,1[$ et étudions la continuité de f au point (b,b).
   a. Lorsque $\lambda \neq -2$, montrer que $f(x,b)$ n'a pas de limite finie lorsque x tend vers b.
   Qu'en déduit-on ?
   b. Lorsque $\lambda = -2$, simplifier l'expression de f et montrer que f est continue sur U.

On considère maintenant la fonction $g : U \to \mathbb{R}$ définie comme suit :

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2xy + y^2}{\sin(x^2 - y^2)} & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

3. Montrer que g admet une dérivée partielle par rapport à x au point (b,b), pour tout $b \in]0,1[$.
   Donner la valeur de cette dérivée partielle.
   On rappelle qu'on a $\sin t = t(1 + \epsilon(t))$ *avec* $\lim_{t \to 0} \epsilon(t) = 0$.