Démonstrations à apprendre

Pour le partiel 1 :

Proposition. Soit $f : X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$. Alors $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ et $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Proposition. Soit U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Alors $U \cap V$ est ouvert. Soit $U_1, \ldots, U_k, \ldots$ des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Alors $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Proposition. Soit $a_k = (x_k, y_k)$ une suite de points de $\mathbb{R}^2$ qui converge vers $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Si $a \in O$ alors $a_k \in O$ à partir d'un certain rang.

Pour le partiel 2 :

Proposition. Soit $a_k = (x_k, y_k)$ une suite de points de $\mathbb{R}^2$ qui converge vers $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Si $a \in O$ alors $a_k \in O$ à partir d'un certain rang.

Proposition. Deux sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.

Proposition. Soit $f \in L(E)$. Les racines de P_f sont exactement les valeurs propres de f.

Pour le partiel 3 :

Proposition. Soit $f \in L(E)$. Les racines de P_f sont exactement les valeurs propres de f.

Proposition. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ entier, et g la restriction de f à un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. Alors les extrémums locaux de g sont des extrémums locaux de f.

Proposition. L'image $f(X)$ d'un compact $X \subset \mathbb{R}^2$ par une application continue $f : X \to \mathbb{R}$ est un compact.

Pour le partiel 4 :

Proposition. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Si $f : U \to \mathbb{R}$ admet un extrémum local et des dérivées partielles en $a \in U$, alors ces dérivées partielles sont nulles en a.

Proposition. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est différentiable en a, elle admet des dérivées partielles en a et sa différentielle $L = df(a)$ est donnée par la formule suivante :

$$L(h, k) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

Proposition. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique q. Alors on a $\dim F + \dim F^\perp \geq \dim E$. Si q est définie sur F, on a de plus $E = F \oplus F^\perp$.

Proposition. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique q. Alors il existe une base de E orthogonale relativement à q.