PROPOSITION D'EXERCICES

Voici quelques rappels et deux exercices tirés des feuilles distribuées en TD, pour ne pas perdre la main ...

ANALYSE

Rappelons la méthode pour la recherche des extremums d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

- On calcule les dérivées partielles premières et on recherche les points critiques, ou stationnaires, c'est-à-dire ceux où elles s'annulent simultanément ;
- On calcule les dérivées secondes et utilise leur valeur en un point critique donné pour écrire la forme quadratique qui apparaît dans le DL à l'ordre 2 en ce point critique ;
- On étudie cette forme quadratique en la décomposant en carrés de formes linéaires indépendantes.

On se reportera au cours pour les détails.
On pourra également relire l'exemple d'étude de point critique traité en cours.

Exercice. On considère la fonction f définie dans $\mathbb{R}^2$ par l'expression :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

a. Montrer que cette fonction admet pour seuls points stationnaires les trois points suivants : $M(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $N(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et $O(0, 0)$.

b. Indiquer la nature des points stationnaires M et N (maximum, minimum, col).

c. Montrer que $f(0 + h, 0 + k) - f(0, 0)$ ne garde pas un signe constant pour h et k voisins de 0.
Conclure quant à la nature du point stationnaire O.

Réponses. Les points M et N sont des minimums : dans les deux cas la forme quadratique à étudier est $q(h, k) = 10h^2 + 4hk + 10k^2$. Pour O, la forme quadratique s'écrit $-2(h - k)^2$, on ne peut pas conclure. Mais en étudiant le signe de $f(h, 0)$ et de $f(h, h)$ pour h proche de 0, on se rend compte que O ne peut être ni un minimum, ni un maximum.

ALGÈBRE

Voici quelques « rappels » concernant les symétries orthogonales.

- Un endomorphisme $f : E \to E$ est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthogonale est symétrique — mais ce n'est pas forcément une symétrie !
- une symétrie $s : E \to E$ est *symétrique* (au sens précédent des endomorphismes symétriques !) si et seulement si c'est une symétrie *orthogonale* ;
- Ainsi, un endomorphisme $s : E \to E$ est une symétrie orthogonale si et seulement si sa matrice M dans une base orthonormale vérifie $M^2 = I$ et ${}^tM = M$;
- Si $s : E \to E$ est la symétrie par rapport à F parallèlement à G, en recollant une base de F et une base de G on obtient une base de E dans laquelle s a une matrice diagonale avec des 1 et des -1 sur la diagonale ;
- En particulier une symétrie est toujours diagonalisable, inversement un endomorphisme diagonalisable dont les valeurs propres sont 1 et -1 est la symétrie par rapport au sous-espace propre E_1, parallèlement à E_{-1}.

Par ailleurs on verra en cours le théorème suivant :
Théorème. Soit E un espace euclidien et $f : E \to E$ un endomorphisme *symétrique*. Alors f est diagonalisable, de plus il existe une base *orthonormale* de vecteurs propres de f.

Exercice. Soit a un paramètre réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a-1 & -a-2 & a-1 \\ -a-2 & a-1 & 1-a \\ a-1 & 1-a & a+2 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que f est diagonalisable.

b. Calculer et factoriser le polynôme caractéristique de f.
On fera apparaître deux 0 sur la 2^e^ ligne en opérant sur les lignes et les colonnes.

c. Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme f est-il une symétrie ?

d. Trouver une base de vecteurs propres pour f lorsque $a = 0$.

e. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel.
Trouver une base *orthonormale* de vecteurs propres de f, lorsque $a = 0$.

Réponses. Le polynôme caractéristique est $P = -(X+1)(X-1)(X-a)$. Attention ! Quand on retranche I_3 à M en laissant le $\frac{1}{3}$ en facteur, il faut mettre des $-3X$ sur la diagonale. Par ailleurs en sortant du déterminant le $\frac{1}{3}$ devient un $\frac{1}{27}$. D'après les rappels, f est une symétrie quand $a = 1$ ou -1. Quand $a = 0$, la base de $\mathbb{R}^3$ suivante est une BON de vecteurs propres de f :

$$u_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \quad u_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1), \quad u_3 = \tfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,-2).$$