Démonstrations à apprendre

Pour le partiel 1 :

Proposition. Soit $f : X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$. Alors $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ et $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Proposition. Soit U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Alors $U \cap V$ est ouvert. Soit $U_1, \ldots, U_k, \ldots$ des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Alors $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Proposition. Soit $p_k = (x_k, y_k)$ une suite de points de $\mathbb{R}^2$ qui converge vers $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Soit F un fermé de $\mathbb{R}^2$ et O un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Si $p_k \in F$ pour tout k alors $p \in F$. Si $p \in O$ alors $p_k \in O$ à partir d'un certain rang.

Proposition. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application continue et $X \subset \mathbb{R}$. Si X est ouvert, alors $f^{-1}(X)$ aussi. Si X est fermé, alors $f^{-1}(X)$ aussi.

Proposition. Soit $f \in L(E)$. Les racines de P_f sont exactement les valeurs propres de f.

Pour le partiel 2 :

Proposition. Soit X une partie de $\mathbb{R}^2$ et $f : X \to \mathbb{R}$ une application continue. Soit (x_k, y_k) une suite de points de X qui converge vers $(x, y) \in X$. Alors la suite $f(x_k, y_k)$ converge vers $f(x, y)$.

Proposition. Les fermés bornés de $\mathbb{R}^2$ sont compacts.

Proposition. L'image $f(X)$ d'un compact $X \subset \mathbb{R}^2$ par une application continue $f : X \to \mathbb{R}$ est un compact.

Proposition. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Si $f : U \to \mathbb{R}$ admet un maximum local et des dérivées partielles en $(a, b) \in U$, alors ces dérivées partielles sont nulles en (a, b).

Pour le partiel 3 :

Proposition. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, q une forme quadratique sur E, et F un sous-espace de E. On a $\dim F + \dim F^\perp \geq \dim E$. De plus on a $E = F \oplus F^\perp$ si q est définie sur F.

Proposition. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique q. Alors E admet une base orthogonale relativement à q.

Proposition. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en un point (a, b) de $\mathbb{R}^2$, et L la différentielle de f en (a, b). Alors f admet des dérivées partielles par rapport à x et y en (a, b), et on a
$$L(x, y) = x\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + y\frac{\partial f}{\partial y}(a, b).$$

Proposition. Soit $P =]a, b[\times]c, d[$ un pavé ouvert dans $\mathbb{R}^2$ et $f : P \to \mathbb{R}$ une application qui admet des dérivées partielles par rapport à x et y en tout point de P. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right| \leq M \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leq M$$
pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors on a $|f(x', y') - f(x, y)| \leq \sqrt{2}M\|(x', y') - (x, y)\|$ pour tous (x', y'), $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Pour le partiel 4 :

Proposition. Soit $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme quadratique définie-positive et $q_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que $q(x) \geq Cq_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Proposition. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Soit $a \in U$ un point critique de f et q la forme quadratique qui apparaît dans le DL_2 de f en a. Si q est définie-positive alors f admet un minimum local en a.

Proposition. Soit E un espace euclidien et $f \in L(E)$ un endomorphisme. Il existe un unique endomorphisme $f^* \in L(E)$ tel que $(f(x)|y) = (x|f^*(y))$ pour tous x, $y \in E$.

Lemme. Soit E un espace euclidien et $f \in L(E)$ symétrique. Alors f admet une valeur propre.

Lemme. Soit E un espace euclidien et $f \in L(E)$ symétrique. Si F est un sous-espace de E tel que $f(F) \subset F$ alors on a aussi $f(F^\perp) \subset F^\perp$.